N I DUNG MÔN GI I TÍCH 2

**B MÔN TOÁN NG D NG**

Ngày 18 tháng 1 năm 2020

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 1 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

References:

GIÁO TRÌNH CHÍNH Giáo trình GI I TÍCH II. Nguy n Đình Huy (ch biên). NXB ĐHQG 2016

TÀI LI U THAM KH O [1] Active calculus, 2018 edition updated, Matthew Boelkins, David Austin, Steven Schlicker. [2] Active calculus multivariable, 2018 edition, Steven Schlicker, Matthew Boelkins, David Austin. [3] Applied calculus, 2009, Frank C. Wilson, Scott Adamson. [4] Calculus, 2012, 10th edition, Anton, Bivens, David. [5] Applied calculus, 2007, 4th edition, Stefan Waner, Steven R. Costenoble. [6] Calculus early transcendentals, sixth edition, James Stewart, Thomson, 2003.

Toán ng D ng N i Dung Môi Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 2 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N

1.1 Đ nh nghĩa hàm nhi u bi n . 1.2 Đ o hàm riêng, vi phân hàm nhi u bi n. 1.3 Đ o hàm theo hư ng, vector gradient, ti p di n, pháp tuy n. 1.4 Đ o hàm riêng, vi phân hàm h p. 1.5 Hàm n. 1.6 Công th c Taylor. \* Gi i thi u m t b c hai. 1.7 C c tr t do. 1.8 C c tr có đi u ki n. Giá tr l n nh t, bé nh t trên mi n dóng và b ch n.Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 3 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**N i dung tu n th 1**

1.1 Đ nh nghĩa hàm nhi u bi n . 1.2 Đ o hàm riêng, vi phân hàm nhi u bi n. 1.3 Đ o hàm theo hư ng, vector gradient, ti p di n, pháp tuy n.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 4 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

Đ nh nghĩa và cho ví d th c t v hàm nhi u bi n.

Trình bày các phương pháp bi u di n hàm 2, 3 bi n

(mô t b ng l i, b ng giá tr , công th c tư ng minh,

đ th ho c đư ng m c, m t m c).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 5 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

**Bài 1:** các vùng có th i ti t mùa đông kh c nghi t, *ch s l nh do gió (wind chill index)* thư ng đư c s d ng đ mô t đ kh c nghi t c a cái l nh. Ch s W này là nhi t đ ch quan ph thu c vào nhi t đ th c t T và t c đ gió v. Vì v y W là m t hàm theo T và v và ta có th vi t *W* = *f*(*T,v*). B ng 1 ghi các giá tr c a W đư c thu th p b i trung tâm khí tư ng qu c gia c a M và cơ quan khí tư ng Canada.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 6 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

D ng ví d hàm s đư c cho b ng s li u. D a vào b ng s li u ta tính giá tr hàm s t i các đi m.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 7 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

**Bài 2:** Vào năm 1928, Charles Cobb và Paul Douglas đã xu t b n m t nghiên c u mà trong đó h mô hình hóa s tăng trư ng c a n n kinh t M trong giai đo n 1899-1922. H đã xem xét m t quan đi m kinh t đư c đơn gi n hóa mà trong đó s n lư ng đư c quy t đ nh b i lư ng nhân công và lư ng v n đ u tư. M c dù có nhi u y u t khác nh hư ng đ n hi u qu kinh t nhưng mô hình c a h đã ch ng t là r t chính xác. Hàm s mà h s d ng đ mô hình hóa s n lư ng có d ng:

*P*(*L, K*) = *bLαK*1−*α* (1)

trong đó P là s n lư ng (giá tr quy ra ti n c a t t c hàng hóa đư c s n xu t trong m t năm), L là lư ng nhân công (t ng s gi làm vi c c a công nhân trong m t năm) và K là lư ng v n đ u tư (tr giá c a t t c máy móc, thi t b và nhà xư ng). Trong ph n sau, chúng ta s tìm hi u làm th nào suy ra d ng th c c a phương trình (1) t m t gi đ nh kinh t nào đó.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 8 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

Cobb và Douglas đã s d ng các d li u kinh t đư c phát hành b i chính ph đ có b ng 2. H l y năm 1899 làm s li u m c và m i đ i lư ng P, L và K vào năm 1899 đư c n đ nh giá tr 100. Các giá tr c a các năm khác đư c tính theo t l ph n trăm c a s li u năm 1899. Cobb và Douglas đã s d ng phương pháp bình phương c c ti u đ làm cho d li u b ng 2 phù h p v i hàm s

*P*(*L, K*)=1*.*01*L*0*.*75*K*0*.*25 (2)

- D ng hàm tư ng minh - Chú ý m t s bài t p, tìm mi n xác đ nh c a hàm 2 bi n, 3 bi n.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 9 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

**Bài 3:** V đ th hàm *f*(*x, y*)=6 − 3*x* − 2*y*

**Bài 4:** V đ th *g*(*x, y*) =

√9 − *x*2 − *y*2

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 10 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

**Bài 5:** S d ng máy tính đ v đ th hàm s n lư ng Cobb-Douglas *P*(*L, K*)=1*.*01*L*0*.*75*K*0*.*25

- ***Thi t l p cách v t các cách v hình b c ph thông. Hư ng d n v hình b ng các công c v hình có s n ( Geogebra, Sketch- pad, Matlab, v hình online desmos.com,...)***

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 11 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Đ nh nghĩa: Đư ng m c** c a hàm hai bi n f là các đư ng cong có phương trình *f*(*x, y*) = *k*, trong đó k là h ng s (trong mi n giá tr c a f).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 12 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

**Bài 6:** S d ng Figure 15 nó đ ư c tính các giá tr c a f(1,3) và f(4,5).

- Đi m (1,3) n m m t ph n nào đó gi a các đư ng m c v i các giá tr z là 70 và 80. Ta ư c tính: *f*(1*,*3) ≈ 73

Tương t , ta ư c tính: *f*(4*,*5) ≈ 56

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 13 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t**

-Nêu đ nh nghĩa, ý nghĩa và cách tính đ o hàm riêng và vi phân hàm tư ng minh, đ o hàm theo hư ng. (lưu ý v hư ng tăng nhanh nh t c a hàm s ) - Trình bày cách tính đ o hàm hàm h p. - Cho ví d v bài toán th c t có s d ng các lo i đ o hàm trên.

Các bài t p tham kh o như sau:

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 14 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm riêng**

**Bài 1:** M t ng n đ i có hình d ng b m t mô t b i hàm s *z* = 1000 − 0*.*005*x*2 − 0*.*01*y*2, trong đó x, y và x đư c tính b ng mét. Tính *z x*(20*,*−10)*,z y*(20*,*−10) và cho bi t s thay đ i chi u cao c a ng n đ i t đi m (20,-10,997) theo hư ng tr c 0x, 0y. **Bài 2:** Nhi t đ c a m t đĩa kim lo i m ng đ t trên m t ph ng Oxy t i m i đi m có t a đ (x,y) cho b i *T* = 100

1+2*x*2 + *y*2. Tính *f x*(0*,*1)*,f y*(0*,*1) và cho bi t s thay đ i c a nhi t đ c a đĩa kim lo i này t đi m (0,1) theo hư ng tr c Ox, Oy. (Đơn v c a T là *oC*, c a x, y là m). **Bài 3:** Ch s nhi t H (nhi t đ mà cơ th c m nh n đư c) là hàm s ph thu c vào nhi t đ môi trư ng T và đ m không khí h. Gi s I=f(T,h) tính theo *oC*, h tính theo %. Hãy cho bi t, n u *f T*(40*,*30) = 2*,f h*(40*,*30) = 0*.*75 đi u này nói gì v s bi n đ i c a ch s nhi t I t m c (T,h)=(40,30).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 15 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm riêng**

**Bài 4:** Chi u cao cua sóng t i m t vùng bi n ph thu c vào t c đ gió và kho ng th i gian mà gió th i v i t c đ đó. N u g i H là chi u cao c a sóng, tính b ng mét (m), th i gian tính theo gi (h), t c đ gió v tính theo km/h thì H=f(v,t). N u *f t*(40*,*10) = 0*.*5*,f v*(40*,*10) = 0*.*3 có th nói gì v s thay đ i chi u cao c a sóng t m c (v,t)=(40,10). **Bài 5:** Nhi t đ T t i m t đ a đi m trên b m t trái đ t ph thu c vào kinh đ x, vĩ đ y và th i đi m t, T= f(x,y,t). T i t a đ 158*o* Tây, 21*o* B c, vào m t ngày tháng giêng, lúc 9 gi sáng, gió th i hơi nóng đi theo hư ng đông b c nên vùng phía Tây và Nam m hơn, vùng phía Đông và phía B c mát hơn. Hãy cho bi t *f x,f y,f t* t i (158,21,9) mang giá tr âm hay dương, t i sao?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 16 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm theo hư ng**

**Bài 1:** M t ng n đ i có hình d ng mô t b i phương trình *z* = 1000 − 0*.*005*x*2−0*.*01*y*2, trong đó x, y và z tình b ng mét. M t ngư i đang đ ng

t a đ (60,40,966). Gi s x hư ng Đông và y hư ng B c. a/ N u ngư i đó đi v hư ng Nam thì anh ta đang đi lên hay đi

xu ng? Đ d c là bao nhiêu? b/ Câu h i tương t n u đi theo hư ng Tây-B c. c/ Đi theo hư ng nào thì ng n đ i có đ d c cao nh t. Đ d c lúc

này là bao nhiêu? **Bài 2:** G n nơi đ t phao c u sinh đ sâu c a h cho b i hàm s *z* = 200 + 0*.*02*x*2 − 0*.*001*y*3, x, y và z tính b ng mét. M t thuy n câu t t a đ (60, 80) hư ng đ n phao c u sinh, gi s phao đ t t i g c t a đ (0,0). Hãy cho bi t m c nư c dư i thuy n s sâu hơn hay c n hơn nơi thuy n xu t phát.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 17 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm theo hư ng**

**Bài 3:** Nhi t đ T t i m t đi m trên qu banh kim lo i t l ngh ch v i kho ng cách t đi m đó đ n tâm qu banh. Gi s tâm qu banh là g c t a đ . Nhi t đ t i đi m có t a đ M(1,2,2) là 120*oC*.

a/ Tìm t c đ thay đ i c a nhi t đ T t M hư ng đ n đi m N(2,1,3) b/ Ch ng minh r ng t 1 đi m b t kỳ, khi di chuy n hư ng đ n tâm

c a qu c u thì nhi t đ tăng nhanh nh t. **Bài 4:** Nhi t đ t i đi m (x,y,z) đư c cho b i *T*(*x,y,z*) = 200*e*−*x*2−3*y*2−9*z*2, trong đó T đư c tính b ng *oC* và x, y, z đư c tính b ng mét.

a/ Tìm t c đ bi n thiên c a nhi t đ t i đi m P(2,1,-2) theo hư ng

t i đi m (3,-3,3). b/ Nhi t đ tăng nhanh nh t t i P theo hư ng nào? c/ T c đ tăng t i đa t i P?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 18 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm theo hư ng**

**Bài 5:** Gi s qua m t vùng nào đó trong không gian, đi n th V đư c cho b i *V* (*x,y,z*)=5*x*2 − 3*xy* + *xyz*

a/ Tìm t c đ bi n thiên c a đi n th t i P(3,4,5) theo hư ng c a

vecto v=(1,1,-1). b/ V bi n thiên nhanh nh t t i P theo hư ng nào? c/ T c đ bi n thiên t i đa t i P là bao nhiêu?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 19 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

N i Dung D y Tu n th 2

1.4 Đ o hàm, vi phân hàm h p. 1.5 Đ o hàm , vi phân hàm n. (t đ c) 1.6 Công th c Taylor.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 20 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Vi phân hàm nhi u bi n**

**Bài 1:** M t chi c thùng hình tr có kích thư c bên trong là bán kính R = 2.5m, chi u cao H = 4m, đ dày thành và đáy là 1dm. Hãy tính g n đúng th tích v t tư s d ng cho vi c ch t o thùng. **Bài 2:** M t hình h p ch nh t có kích thư c các c nh là: a = 2m, b = 3m, c = 6m. Hãy tính g n đúng đ dài đư ng chéo hình h p n u a tăng 2cm, b tăng 1cm và c gi m 3cm. **Bài 3:** Trong nón c t có bán kính dư i R = 20cm, bán kính đáy trên r = 10cm, chi u cao h = 30cm. Tính x p x s thay đ i th tích n u R tăng thêm 2mm, r tăng thêm 3mm và h gi m đi 1mm. **Bài 4:** Ch s l nh do gió đư c mô hình hóa b i hàm s *W* = 13*.*12 + 0*.*6215*T* −13*.*37*v*0*.*16 − 0*.*3965*Tv*0*.*16, trong đó T là nhi t đ (*oC*) và v là v n t c gió (km/h). V n t c gió đư c đo là 26 km/h v i sai s kh dĩ là ±2*km/h* và nhi t đ đo đư c là −11*oC*, v i sai s kh dĩ là ±1*o*. S d ng vi phân đ ư c tính sai s t i đa c a giá tr W do sai s c a T và v.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 21 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Vi phân hàm nhi u bi n**

**Bài 5:** Áp su t, th tích và nhi t đ c a 1mol khí lý tư ng có m i quan h nhau qua phương trình *PV* = 8*.*31*T*, trong đó P đư c tính b ng kilopascal, V đư c tính b ng lít và T đư c tính b ng kelvin. S d ng vi phân đ tìm m c bi n thiên áp su t n u th tích tăng t 12L lên 13L và nhi t đ gi m t 310K xu ng 305K. **bài 6:** N u R là t ng đi n tr c a ba đi n tr m c song song , v i *R*1*,R*2*,R*3 thì 1*R* = 1*R*1 + 1*R*2 + 1*R*3, n u đi n tr đư c tính b ng Ohm, *R*1 = 25Ω*,R*2 = 40Ω*,R*3 = 50Ω sai s kh dĩ 0*.*5% m i đi n tr . Tính sai s t i đa c a giá tr R tính đư c.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 22 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm hàm h p**

**Bài 1:** M t con r p di chuy n v i phương trình chuy n đ ng là *x* = √1 + *t, y* =2+ 13*t*, đây x, y tính theo cm và t là th i gian tính b ng giây (s). Nhi t đ t o ra trên con đư ng r p di chuy n là hàm T(x,y) tính b ng *oC*. Bi t r ng *T x*(2*,*3) = 4*,T y*(2*,*3) = 3, nhi t đ tăng như th nào sau 3 giây trên đư ng mà con r p di chuy n. **Bài 2:** V i 1 mol khí lý tư ng, phương trình tr ng thái cho b i PV = 8.31T, trong đó P(kPascal), V(lít), T(Kelvin). T i th i đi m nhi t đ đ t đư c 300*oK* và th tích khí đ t 100lit, v n t c tăng nhi t là 0.1K/s và v n t c tăng th tích là 0.2L/s, tính t c đ thay đ i c a áp su t P. **Bài 3:** T c đ âm thanh xuyên qua l p nư c bi n có đ m n 35%*o* cho b i phương trình *C* = 1449*.*2+4*.*6*T* − 0*.*055*T* 2 + 0*.*00029*T* 3 + 0*.*016*D*, v i C là t c đ âm thanh (m/s), T là nhi t đ (*oC*), D là đ dày c a l p nư c bi n (m). M t th l n sau 20 phút thì đ sâu l n đư c đ t t c đ 3/10 m/phut, nhi t đ gi m 0*.*25*oC/phut*. Ư c tính t c đ thay đ i c a âm thanh t i phút th 20.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 23 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm hàm h p**

**Bài 4:** S n lư ng lúa mì P c a m t năm ph thu c vào nhi t đ T và lư ng mưa trung bình R c a năm đó. Các nhà khoa h c ư c tính r ng nhi t đ trung bình m i năm tăng 0*.*15*oC/n*ń*m* và lư ng mưa tăng 0.1cm/năm. T i th i đi m hi n t i *P T* = −2*,P R* = 8.

a/ Các đ o hàm riêng này có ý nghĩa gì? b/ Ư c tính t c đ thay đ i s n lư ng lúa mì th i đi m hi n t i. **Bài 5:** Bán kính c a hình nón tròn đ ng tăng v i t c đ 1.8in/s trong khi đ cao c a nó gi m v i t c đ 2.5in/s. T c đ bi n thiên c a th tích hình nón là bao nhiêu khi bán kình là 120 in và đ cao 140 in?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 24 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm hàm h p**

**Bài 6:**Chi u dài l, chi u r ng w, chi u cao h c a cái h p bi n thiên theo th i gian. T i m t th i đi m xác đ nh, các chi u cao l=1m, và w=h=2m, l và w tăng v i t c đ 2m/s trong khi h gi m v i t c đ 3m/s. T i th i đi m đó, tìm t c đ bi n thiên c a các đ i lư ng sau:

a/ Th tích b/ Di n tích b m t c/ Chi u dài đư ng chéo **Bài 7:** Đi n áp V trong m ch đi n đơn gi n gi m ch m khi pin tiêu hao năng lư ng. Đi n tr R tăng ch m khi các đi n tr nóng lên. S d ng đ nh lu t Ohm, V = I.R, đ tìm t c đ bi n thiên c a cư ng đ dòng đi n khi *R* = 400Ω*,I* = 0*.*08*A, dVdt* = −0*.*01*V/s, dRdt* = 0*.*03Ω*/s*

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 25 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài toán th c t - Đ o hàm hàm h p**

**Bài 8:** M t nhà s n xu t đã mô hình hóa hàm s n xu t hàng năm P c a nó như hàm Cobb-Douglas *P*(*L, K*)=1*.*47*L*0*.*65*K*0*.*35, trong đó L là s gi lao đ ng (theo nghìn) và K là v n đ u tư (tri u đô la). gi s khi L = 30, K = 8, lư ng công nhân gi m v i t c đ 2000 gi lao đ ng/ năm và v n tăng v i t c đ 500000 $*/*năm. Tìm t c đ bi n thiên c a s n lư ng. **Bài 9:** M t c nh c a tam giác tăng v i t c đ 3cm/s và c nh th hai gi m v i t c đ 2cm/s. N u di n tích c a hình tam giác không đ i thì t c đ bi n thiên c a góc gi a các c nh là bao nhiêu khi c nh đ u tiên dài 20cm, c nh th hai dài 30 cm và góc là *π/*6.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 26 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**N i dung d y tu n 3**

\* Gi i thi u m t b c hai. 1.7 C c tr t do. 1.8 C c tr có đi u ki n. Giá tr l n nh t, bé nh t trên mi n đóng và b ch n. Trong ph n c c tr , ch n cách ti p c n phù h p đ SV d theo dõi nên th ng nh t ch n đư ng m c.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 27 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.6 Công th c Taylor, gi i thi u m t b c hai**

+ Gi i thi u m t b c hai (nh n d ng), chú ý đ n đ th vì đây là bư c chu n b đ cho sinh viên có hình dung c n c a các lo i tích phân các chương sau. + Công th c Taylor + Pháp tuy n và ti p di n c a m t cong Xem các BT [2] [2] Exercises: 11, 12 P.17, exercises 15, 16 P.18

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 28 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

Tìm d ng BT v a thi t l p hàm nhi u bi n, sau đó nh n d ng m t b c hai, có th h i thêm câu v mi n xác đ nh c a hàm v a thi t l p. d ng bài t p này ph n k thu t tính toán đã có r t nhi u. Chúng ta tìm ti p các ng d ng trong bài toán th c t :

Exercise 11, P. 17 [2]: A manufacturer sells a ardvark masks at a price of $210 per mask and b butterfly masks at a price of $490 per mask. A quantity of a aardvark masks and b butterfly masks is sold at a total cost of $550 to the manufacturer. (a) Express the manufacturer’s profit, P, as a function of a and b. P(a; b) = dollars. (b) The curves of constant profit in the ab-plane are (i) hyperbolas (ii) ellipses (iii) lines (iv) circles (v) parabolas

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 29 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài 2:** Xét n ng đ C (mg/lit) c a m t lo i thu c trong máu như m t hàm theo bi n s lư ng x (mg) và t là th i gian k t lúc tiêm.V i 0 ≤ *x* ≤ 4 và *t* ≥ 0, ta có hàm *C* = *f*(*x, t*) = *te*−*t*(5−*x*). V đ th cho hai bi n hàm đ c l p trên trang khác nhau, ch c ch c r ng b n có th gi i thích ý nghĩa v n ng đ thu c. (*a*) f(4,t) (*b*) f(x,1) S d ng đ th (a), ch ra đư c f(4,t) - Đ t t i ra khi t = ............................ - Đ t t i thi u khi t =........................... S d ng đ th (b), ch ra đư c f(x,1) - Đ t t i ra khi x = ............................ - Đ t t i thi u khi x =...........................

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 30 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài 3:** Theo đinh lu t Poyle v khí lí tư ng, *PV* = *RT*, trong đó áp l c P (Pascal), nhi t đ T (Kelvin) và th tích V (*m*3) c a 1 mol khí gas (*R* = 8*.*314*J/molK* là h ng s khí ph ), và mô t tr ng thái c a các khí không d hóa l ng như khí *O*2*,H*2. Gi i phương trình, xem th tích là hàm, bi n là áp l c và nhi t đ :

*V* (*P, T*) = 8*.*314*T*

*P*

a. Gi i thích m i liên h gi a V và P khi P = 1000 b. Gi i thích v đư ng m c khi V = 0.5 c. Mô t s nh hư ng c a nhi t đ và áp l c vào th tích

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 31 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N Bài 4:** When people buy a large ticket item like a car or a house, they often take out a loan to make the purchase. The loan is paid back in monthly installments until the entire amount of the loan, plus interest, is paid. The monthly payment that the borrower has to make depends on the amount *P* of money borrowed (called the principal), the duration t of the loan in years, and the interest rate r. For example, if we borrow $18*,*000 to buy a car, the monthly payment *M* that we need to make to pay off the loan is given by the formula

*M*(*r, t*) = 1500*r* 1 − 1

(1+ 12*r*)12*t*

a. Find the monthly payments on this loan if the interest rate is 6the

duration of the loan is 5 years. b. Create a table of values that illustrates the trace of M with r fixed

at 5%. Use yearly values of t from 2 to 6. Round payments to the nearest penny. Explain in detail in words what this trace tells us about *M*. c. Create Toán ng a D table ng of values N i that Dung Môn illustrates Gi i Tích 2 the Ngày trace 18 of tháng M 1 with năm 2020 t fixed

32 / 75

at 3 years. Use rates from 3 to 11 % in increments of 2%. Round

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

d. Consider the combinations of interest rates and durations of loans

that result in a monthly payment of $200. Solve the equation *M*(*r*;*t*) = 200 for *t* to write the duration of the loan in terms of the interest rate. Graph this level curve and explain as best you can the relationship between *t* and *r*.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 33 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài 5:** D a trên d li u t năm 1998 đ n 2001, doanh thu c a công ty Kellogg và nh ng công ty con đư c mô t b i hàm

*S*(*a, e*) = −0*.*36661*a* + 0*.*16556*e* + 4671*.*3(tri u$)

trong đó a là s lư ng ti n đ tr cho qu ng cáo (tri u $) và e là s lư ng nhân viên c a công ty.Vào năm 2001, công ty có 26424 nhân viên, ph i tr 519.2 tri u $ ti n qu ng cáo, và doanh thu là 8853.3 tri u $. N u công ty tăng ti n qu ng cáo lên 700 tri u $ và gi m s lư ng nhân viên còn 25000, thì doanh thu d đoán là bao nhiêu?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 34 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**Bài 6:** M t nhà thi t k h p đã thi t k m t h p v i đáy là hình vuông (như hình). Tìm phương trình di n tích b m t c a h p không l p ráp. C n bao nhiêu inch2 đ thi t k nên cái h p r ng 6 inch, dài 6 inch và cao 18 inch?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 35 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng )**

D ng 1 (k thu t tính toán): Các BT v k thu t tính toán c c tr t do, c c tr có đi u ki n và GTLN, GTNN, c n dùng công c v tình các BT cho SV có th hi u v b n ch t c a các BT v a làm. D ng 2: ng d ng th c t (BT T i ưu)

Ví d như BT 5-18 , Stewart p.978

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 36 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

**Bài 5.** *f*(*x, y*)=9 − 2*x* + 4*y* − *x*2 − 4*y*2 **Bài 6.** *f*(*x, y*) = *x*3*y* + 12*x*2 − 8*y* **Bài 7.** *f*(*x, y*) = *x*4 + *y*4 − 4*xy* + 2 **Bài 8.** *f*(*x, y*) = *e*4*y*−*x*2−*y*2 **Bài 9.** *f*(*x, y*)=(1+ *xy*)(*x* + *y*) **Bài 10.** *f*(*x, y*)=2*x*3 + *xy*2 + 5*x*2 + *y*2 **Bài 11.** *f*(*x, y*) = *x*3 − 12*xy* + 8*y*3 **Bài 12.** *f*(*x, y*) = *xy* + 1*x* + 1*y* **Bài 13.** *f*(*x, y*) = *ex* cos*y* **Bài 14.** *f*(*x, y*) = *y* cos*x*

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 37 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

**Bài 15.** *f*(*x, y*)=(*x*2 + *y*2)*ey*2−*x*2 **Bài 16.** *f*(*x, y*) = *ey*(*y*2 − *x*2) **Bài 17.** *f*(*x, y*) = *y*2 − 2*y* cos*x,* 1 ≤ *x* ≤ 7 **Bài 18.** *f*(*x, y*) = sin*x*sin*y,* −*π<x<π,* −*π<y<π*

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 38 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

BT: 29-36 Stewart. p.978

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 39 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

**Bài 29.** *f*(*x, y*) = *x*2 + *y*2 − 2*x, D* là mi n hình tam giác đóng có các đ nh (2*,*0)*,*(0*,*2) và (0*,*−2). **Bài 30.** *f*(*x, y*) = *x* + *y* − *xy, D* là mi n hình tam giác đóng có các đ nh (0*,*0)*,*(0*,*2) và (4*,*0). **Bài 31.** *f*(*x, y*) = *x*2 + *y*2 + *x*2*y* + 4*,D* = {(*x, y*)||*x*| ≤ 1*,*|*y*| ≤ 1}. **Bài 32.** *f*(*x, y*)=4*x* + 6*y* − *x*2 − *y*2*,D* = {(*x, y*)|0 ≤ *x* ≤ 4*,*0 ≤ *y* ≤ 5}. **Bài 33.** *f*(*x, y*) = *x*4 + *y*4 − 4*xy* + 2*,D* = {(*x, y*)|0 ≤ *x* ≤ 3*,*0 ≤ *y* ≤ 2}. **Bài 34.** *f*(*x, y*) = *xy*2*,D* = {(*x, y*)|*x* ≥ 0*,y* ≥ 0*,x*2 + *y*2 ≤ 3}. **Bài 35.** *f*(*x, y*)=2*x*3 + *y*4*,D* = {(*x, y*)|*x*2 + *y*2 ≤ 1}. **Bài 36.** *f*(*x, y*) = *x*3 − 3*x* − *y*3 + 12*y,D* là hình t giác mà các đ nh c a nó là (−2*,*3)*,*(2*,*3)*,*(2*,*2) và (−2*,*−2).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 40 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Đ nh nghĩa và cách tìm c c tr t do, c c tr có đi u ki n, giá tr l n nh t, nh nh t (lưu ý v cách s d ng đư ng m c đ i v i hàm 2 bi n). Ví d 3, ví d 4 trong Stewart trang 972, 973. Bài t p 3,4 Stewart trang 9.77.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 41 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Đ nh nghĩa và cách tìm c c tr t do, c c tr có đi u ki n, giá tr l n nh t, nh nh t (lưu ý v cách s d ng đư ng m c đ i v i hàm 2 bi n).

**Ví d 3.** Tìm các giá tr c c đ i đ a phương và c c ti u đ a phương và các đi m yên ng a c a *f*(*x, y*) = *x*4 + *y*4 − 4*xy* + 1 **Gi i.** Xác đ nh các đi m t i h n:

*fx* = 4*x*3 − 4*y fy* = 4*y*3 − 4*x*

Cho các đ o hàm riêng này b ng 0 ta đư c các phương trình

*x*3 − *y* = 0 và *y*3 − *x* = 0

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 42 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Gi i h trên ta đư c ba đi m t i h n là (0*,*0)*,*(1*,*1)*,*(−1*,*−1) Ti p theo ta tính đ o hàm riêng c p hai là *D*(*x, y*) :

*fxx* = 12*x*2 *fxy* = −4 *fyy* = 12*y*2 *D*(*x, y*) = *fxxfyy* − (*fxy*)2 = 144*x*2*y*2 − 16

Vì *D*(0*,*0) = −16 *<* 0, nên t trư ng h p (c) c a Tiêu chu n Đ o hàm

c p hai, ta suy ra g c t a đ là đi m yên ng a; t c là *f* không có c c đ i đ a phương ho c c c ti u đ a phương t i (0*,*0).

Vì *D*(1*,*1) = 128 *>* 0 và *f*(1*,*1) = 12 *>* 0, nên t trư ng h p (a) c a Tiêu chu n, ta th y *f*(1*,*1) = −1 là c c ti u đ a phương. Tương t , ta có *D*(−1*,*−1) = 128 *>* 0 và *fxx*(−1*,*−1) = 12 *>* 0, vì v y *f*(−1*,*−1) = −1 cũng là c c ti u đ a phương.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 43 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Đ th c a *f* đư c bi u di n trong Figure 4 và đư ng m c tương ng

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 44 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

**Ví d 4.** Tìm và phân lo i các đi m t i h n c a hàm s

*f*(*x, y*) = 10*x*2*y* − 5*x*2 − 4*y*2 − *x*4 − 2*y*4 Tìm đi m cao nh t trên đ th c a *f*. **Gi i.** Các đ o hàm riêng c p 1 là

*fx* = 20*xy* − 10*x* − 4*x*3 *fy* = 10*x*2 − 8*y* − 8*y*3 Vì v y, đ tìm đi m t i h n ta c n gi i các phương trình

2*x*(10*y* − 5 − 2*x*2) = 0 (1) và 5*x*2 − 4*y* − 4*y*3 = 0 (2) T (1) ta có: *x* = 0 th vào (2) ⇒ *y* = 0, vì v y đi m t i h n (0*,*0) Khi 10*y* − 5 − 2*x*2 = 0 ⇒ *x*2 = 5*y* − 2*,*5 th vào (2) ta đư c

*g*(*y*)=4*y*3 − 21*y* + 12*,*5=0

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 45 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

S d ng máy tính v đ th hàm *g*(*y*) ta đư c phương trình *g*(*y*)=0 có 3 nghi m*y* ≈ −2*,*5452 *y* ≈ 0*,*6468 *y* ≈ 1*,*8984

N u *y* ≈ −2*,*5452, thì *x* không có giá tr th c tương ng. N u *y* ≈ 0*,*6468, thì *x* ≈ ±0*,*8567. N u *y* ≈ 1*,*8984, thì *x* ≈ ±2*,*6442. Vì v y ta có ta có t t c năm đi m t i h n mà đư c phân tích trong bi u đ sau. T t c các đ i lư ng đư c làm tròn đ n hai ch s th p phân.

Đi m t i h n Giá tr c a *f fxx D* K t lu n

(0*,*0) 0*,*00 −10*,*00 80*,*00 C c đ i đ a phương (±2*,*64; 1*,*90) 8*,*50 −55*,*93 2488*,*72 C c đ i đ a phương (±0*,*86; 0*,*65) −1*,*48 −5*,*87 −187*,*64 Đi m yên ng a

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 46 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (BT ng d ng)**

Bài t p 19-52 Stewart trang 979. Bài T p 63 Stewart trang 994.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 47 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Hình 7 và 8 cho hai góc nhìn c a đ th *f* và chúng ta th y r ng b m t lõm hư ng xu ng dư i. [Đi u này cũng có th th y đư c t bi u th c tính *f*(*x, y*): Các s h ng tr i hơn là −*x*4 − 2*y*4 khi |*x*| và |*y*| nh hơn.] So sánh các giá tr c a *f* t i các đi m c c đ i đ a phương c a nó, ta th y r ng giá tr c c đ i tuy t đ i c a *f* là *f*(±2*,*64; 1*,*90) ≈ 8*,*50. Nói cách khác, các đi m cao nh t trên đ th c a *f* là (±2*,*64; 1*,*90; 8*,*50).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 48 / 75

+Đánh máy: Ví d 3, ví d 4 972, 973 nh dán hình.

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (k thu t tính toán và BT ng d ng)**

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 49 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (BT ng d ng)**

**Bài 39.** Tìm kho ng cách ng n nh t t đi m (2*,*0*,*−3) đ n m t ph ng *x* + *y* + *z* = 1.

**Bài 40.** Tìm đi m trên m t ph ng *x* − 2*y* + 3*z* = 6 sao cho g n đi m (0*,*1*,*1) nh t.

**Bài 41.** Tìm các đi m trên hình nón *z*2 = *x*2 + *y*2 sao cho g n đi m (4*,*2*,*0) nh t.

**Bài 42.** Tìm các đi m trên m t *y*2 =9+ *xz* sao cho g n g c t a đ nh t.

**Bài 43.** Tìm bai s dương mà t ng c a chúng là 100 và tích c a chúng là m t giá tr c c đ i.

**Bài 44.** Tìm ba s dương mà t ng c a chúng b ng 12 và t ng các bình phương c a chúng là nh nh t có th . Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 50 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (BT ng d ng)**

**Bài 45** Tìm th tích c c đ i c a hình h p ch nh t n i ti p hình c u bán kính *r*.

**Bài 46.** Tìm các chi u c a h p có th tích 1000*cm*3 mà có di n tích b m t c c ti u.

**Bài 47.** Tìm th tích c a hình h p ch nh t trong góc ph n tám th nh t v i ba m t ph ng t a đ và m t đ nh trong m t ph ng *x* + 2*y* + 3*z* = 6.

**Bài 48.** Tìm các chi u c a h p có th tích có th tích l n nh t n u t ng di n tích b m t đư c cho là 64*cm*2.

**Bài 49.** Tìm các chi u c a h p ch nh t có th tích c c đ i sao cho t ng chi u dài c a 12 c nh là h ng s *c*.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 51 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (BT ng d ng)**

**Bài 50.** Đáy c a m t b nuôi cá th tích *V* đư c làm b ng đá phi n và các m t bên đư c làm b ng th y tinh. N u đá phi n có giá (trên m t đơn v di n tích) g p năm l n th y tinh, tìm các chi u c a b cá mà làm gi m t i thi u chi phí nguyên v t li u.

**Bài 51.** M t cái h p các-tông không n p có th tích 32*,*000*cm*3. Tìm các chi u c a h p mà làm gi m t i thi u lư ng các-tông đư c s d ng đ làm nó.

**Bài 52.** M t tòa nhà hình ch nh t đang đư c thi t k đ gi m thi u s m t nhi t. Các b c tư ng phía đông và phía tây m t nhi t v i t l 10 đơn v /*m*2 m t ngày, các b c tư ng phía b c và phía nam m t nhi t v i t l 8 đơn v /*m*2 m t ngày, sàn nhà m t nhi t v i t l 1 đơn v /*m*2 m t ngày. M i b c tư ng ít nh t ph i dài 30*m*, chi u cao ít nh t 4*m*, và th tích ph i đúng 4000*m*3.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 52 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

**1.5 C c tr t do, c c tr có đi u ki n, GTLN, GTNN (BT ng d ng)**

**(a)**Tìm và phát h a mi n xác đ nh c a s m t nhi t như m t hàm theo chi u dài c a các m t.

**(b)** Tìm các chi u mà gi m thi u s m t nhi t. (Ki m tra các đi m t i h n và các đi m trên biên c a mi n xác đ nh).

**(c)** B n có th thi t k m t tòa nhà v i s m t nhi t th m chí còn ít hơn n a n u xóa b gi i h n đ dài c a b c tư ng không?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 53 / 75

**CHƯƠNG 1: HÀM NHI U BI N**

Chú ý

Các Chương 2,3,4 chúng tôi ch th ng nh t n i dung d y và các th ng nh t các d ng ng d ng th c t . Vì v y, khi d y giáo viên nên tìm và so n d y theo đ nh hư ng th ng nh t.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 54 / 75

Chương 2. Tích Phân Kép

N i dung chương 2

Chương 2: Tích phân b i. 2.1 Tích phân kép 2.2 Đ i bi n trong tích phân kép 2.3 Tích phân b i ba 2.4 Đ i bi n trong tích phân b i 3.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 55 / 75

Chương 2. Tích Phân Kép

N i dung d y tu n th 4

2.1 Tích phân kép

- Trình bày cách d n v tích phân kép: Bài toán th tích, bài toán kh i lư ng (mô hình tích phân). - Đ nh nghĩa tích phân kép. Phát bi u đ nh lý giá tr trung bình. Phát bi u đ nh lý Fubini v cách tính tích phân kép. Tính ch t c a tích phân kép. - Cho ví d v các ng d ng c a tích phân kép trong vi c tính kh i lư ng riêng và kh i lư ng. (Bài toán th c t v giá tr trung bình, moment, t a đ tr ng tâm,. . . s làm n i dung trong BTL)

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 56 / 75

Chương 2. Tích Phân Kép

N i dung d y tu n th 5

2.2 Đ i bi n trong tích phân kép - Xây d ng t a đ c c - Phát bi u công th c đ i bi n t ng quát. V n d ng trong đ i bi n t a đ c c.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 57 / 75

Chương 2. Tích Phân Kép

N i dung d y tu n th 6

2.3 Tích phân b i ba 2.4 Đ i bi n trong tích phân b i 3

Đ nh nghĩa tích phân b i ba. - Phát bi u tính ch t c a tích phân b i 3. - Phát bi u đ nh lý Fubini và cách tính tích phân b i 3. - Đ i bi n sang t a đ tr , t a đ c u, đ i bi n t ng quát.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 58 / 75

Chương 2. Tích Phân Kép

N i dung d y tu n th 7

2.4 Đ i bi n trong tích phân b i 3 (ti p theo)

Đ i bi n sang t a đ c u, đ i bi n t ng quát. - Ki m tra, ôn t p gi a kỳ (không b t bu c)

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 59 / 75

Chương 3: Tích phân đư ng

N i dung chương 3

Chương 3: Tích phân đư ng 3.1 Tham s hóa đư ng cong. 3.2 Tích phân đư ng lo i 1. 3.3 Tích phân đư ng lo i 2. 3.3 Công th c Green. 3.4 Tích phân không ph thu c đư ng đi

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 60 / 75

Chương 3: Tích phân đư ng

N i dung d y tu n th 8

Chương 3: Tích phân đư ng 3.1 Tham s hóa đư ng cong. 3.2 Tích phân đư ng lo i 1

- Trình bày cách tham s hóa đư ng cong trong m t ph ng và trong không gian (lưu ý v hư ng nhìn khi tham s hóa đư ng không gian). - Trình bày bài toán d n v tích phân đư ng lo i 1 (bài toán tính di n tích c a d i băng). Nêu đ nh nghĩa và tính ch t c a tích phân đư ng lo i 1 (trong m t ph ng và không gian). - Trình bày cách tính tích phân đư ng lo i 1. - ng d ng trog bài toán tính kh i lư ng cung.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 61 / 75

Chương 3: Tích phân đư ng

N i dung d y tu n th 9

Chương 3: Tích phân đư ng 3.3 Tích phân đư ng lo i 2. 3.3 Công th c Green. 3.4 Tích phân không ph thu c đư ng đi

- Trình bày bài toán d n v tích phân đư ng 2 (bài toán tính công). - Trình bày đ nh nghĩa, tính ch t c a tích phân đư ng lo i 2, cách tính t vi c tham s hóa đư ng cong. - Phát bi u và phân tích các đ nh lý Green, đ nh lý v tích phân không ph thu c đư ng đi.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 62 / 75

Chương 4: Tích phân tích phân m t

N i dung chương 4

Chương 4: Tích phân tích phân m t 4.1 Tham s hóa m t cong 4.2 Tích phân m t lo i 1 4.3 Tích phân m t lo i 2

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 63 / 75

Chương 4: Tích phân tích phân m t

N i dung d y tu n th 10

Chương 4: Tích phân tích phân m t 4.1 Tham s hóa m t cong 4.2 Tích phân m t lo i 1

- Tham s hóa m t cong. - Nêu đ nh nghĩa và cách tính tích phân m t lo i 1. - ng d ng c a tích phân m t lo i 1. - ng d ng vào tính kh i lư ng t m cong.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 64 / 75

Chương 4: Tích phân tích phân m t

N i dung d y tu n th 11

4.3 Tích phân m t lo i 2

Trình bày bài toán thông lư ng d n v tích phân m t lo i 2. Trư ng vector. - Đ nh nghĩa m t đ nh hư ng, cách xác đ nh phía c a m t đ nh hư ng. - Đ nh nghĩa tích phân m t lo i 2. - Trình bày cách tính tích phân m t lo i 2. - Đ nh lý Gauss-Oxtrogratski (nh n m nh m i liên h gi a 2 lo i tích phân, m t kín). - Đ nh lý Stokes (nh n m nh m i liên h gi a các lo i tích phân). - Bài toán th c t : Thông lư ng ch t l ng.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 65 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

Nôi dung chương 5

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a 5.1 Chu i s 5.2 Chu i lũy th a 5.3 Chu i Taylor

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 66 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

N i dung tu n d y th 12

5.1 Chu i s Trình bày đ nh nghĩa chu i s , s h i t c a chu i s , t ng chu i, tính ch t c a chu i, đi u ki n c n c a s h i t . - Kh o sát chu i hình h c (chu i CSN). - Phát bi u các tiêu chu n h i t c a chu i s không âm(Tích phân, so sánh). - Kh o sát chu i đi u hòa. - Phát bi u các tiêu chu n Leibnitz cho chu i đan d u.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 67 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**Chu i hình h c**

Chu i hình h c

∞∑*n*=1*a.rn*−1 = *a* + *a.r* + *a.r*2 + *...* H i t n u |*r*| *<* 1 và t ng c a nó là:

∞∑*n*=1*a.rn*−1 = *a*

1 − *r* |*r*| *<* 1

N u |*r*| *>* 1, chu i hình h c phân kỳ.

Ti p theo đánh máy các BT trong tài li u [1]: Ex 5-8 P.448 Ex 69 P.69

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 68 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**ng d ng chu i hình h c**

Bài 1: Gi s b n th m t qu bóng t đ cao h. S va ch m v i m t đ t làm cho qu bóng b m t năng lư ng và do đó nó s không tr l i chi u cao ban đ u. Trái bóng sau đó s rơi xu ng đ t, b t ngư c tr l i và ti p t c. Gi s t i m i l n n y qu bóng đi đư c b ng 3*/*4 đ cao đ cao mà nó rơi xu ng. G i *hn* là chi u cao c a qu bóng n y lên th *n*, v i *h*0 = *h*. Trong bài t p này, chúng ta s xác đ nh quãng đư ng mà qu bóng đi đư c và th i gian c n thi t đ đi đư c quãng đư ng đó. a) Xác đ nh *h*1 theo *h*. b) Xác đ nh *h*3 theo *h*. c) Xác đ nh *hn* theo *h*. d) Vi t m t chu i vô h n th hi n t ng quãng đư ng mà qu bóng đi đư c. Sau đó xác đ nh t ng c a chu i này.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 69 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**ng d ng chu i hình h c**

Ti p theo, hãy xác đ nh t ng th i gian c a bóng trên không.Khi qu bóng rơi t đ cao *H*, n u chúng ta gi s l c hút trái đ t t i th i đi m *t* đư c cho b i:

*H* = 1*/*2*g.t*2

S d ng công th c này đ xác đ nh th i gian c n thi t đ bóng ch m đ t sau khi b r t t đ cao H.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 70 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**ng d ng chu i hình h c**

Bài 2: The goal of a federal government stimulus package is to positively affect the economy. Economists and politicians quote numbers like k million jobs and a net stimulus to the economy of n billion of dollars. Where do they get these numbers? Let’s consider one aspect of a stimulus package: tax cuts. Economists understand that tax cuts or rebates can result in long-term spending that is many times the amount of the rebate. For example, assume that for a typical person, 75% of her entire income is spent (that is, put back into the economy). Further, assume the government provides a tax cut or rebate that totals P dollars for each person. a. The tax cut of P dollars is income for its recipient. How much of this tax cut will be spent?

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 71 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**ng d ng chu i hình h c**

b. In this simple model, we will say that the spent portion of the tax cut/rebate from part (a) then becomes income for another person who, in turn, spends 75% of this income. After this second round of spent income, how many total dollars have been added to the economy as a result of the original tax cut/rebate? c. This second round of spending becomes income for another group who spend 75% of this income, and so on. In economics this is called the multiplier effect. Explain why an original tax cut/rebate of P dollars will result in multiplied spending of 0*.*75*P*(1 + 0*.*75 + 0*.*752 + ··· dollars. d. Based on these assumptions, how much stimulus will a 200 billion dollar tax cut rebate to consumers add to the economy, assuming consumer spending remains consistent forever.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 72 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**ng d ng chu i hình h c**

Xem [3], Chapter 11, Section 11.2 P.733-746.

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 73 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

**5.2 Chu i lũy th a**

- Đ nh nghĩa chu i lũy th a, bán kính h i t và mi n h i t c a chu i lũy th a - Phát bi u tính ch t c a chu i lũy th a (tính liên t c c a t ng chu i, chu i đ o hàm, tích phân).

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 74 / 75

Chương 5: Chu i s và chu i lũy th a

N i dung tu n d y th 13

**5.3 Chu i Taylor** - Đ nh nghĩa chu i Taylor. - Trình bày đi u ki n h i t và t ng c a chu i Taylor. - Trình bày cách s d ng chu i Maclaurin đ tìm t ng chu i s .

Toán ng D ng N i Dung Môn Gi i Tích 2 Ngày 18 tháng 1 năm 2020 75 / 75